TOPOGRAFIA

TEORIA DOS ERROS:
MEDIR, REPETIR, ERRAR, MINIMIZAR E ERRAR ≠

Augusto Uchôa
LABORATÓRIO DE GEOMÁTICA APLICADA
DET/CT/UFC

Erro x Incerteza

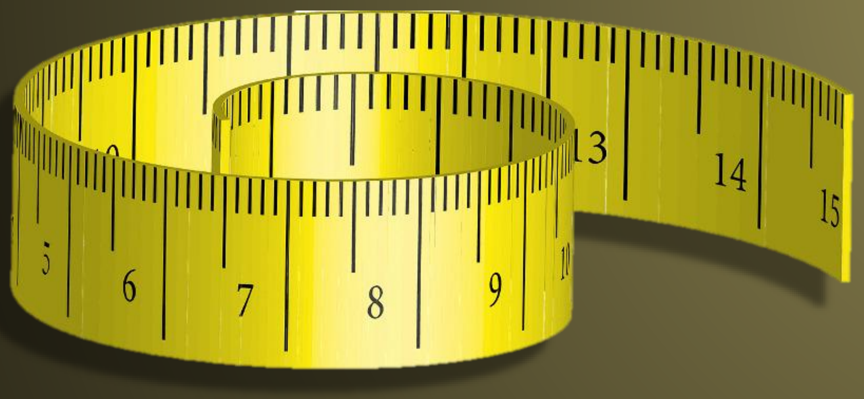
resultado de uma medição - valor verdadeiro

parâmetro, associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos a uma medida

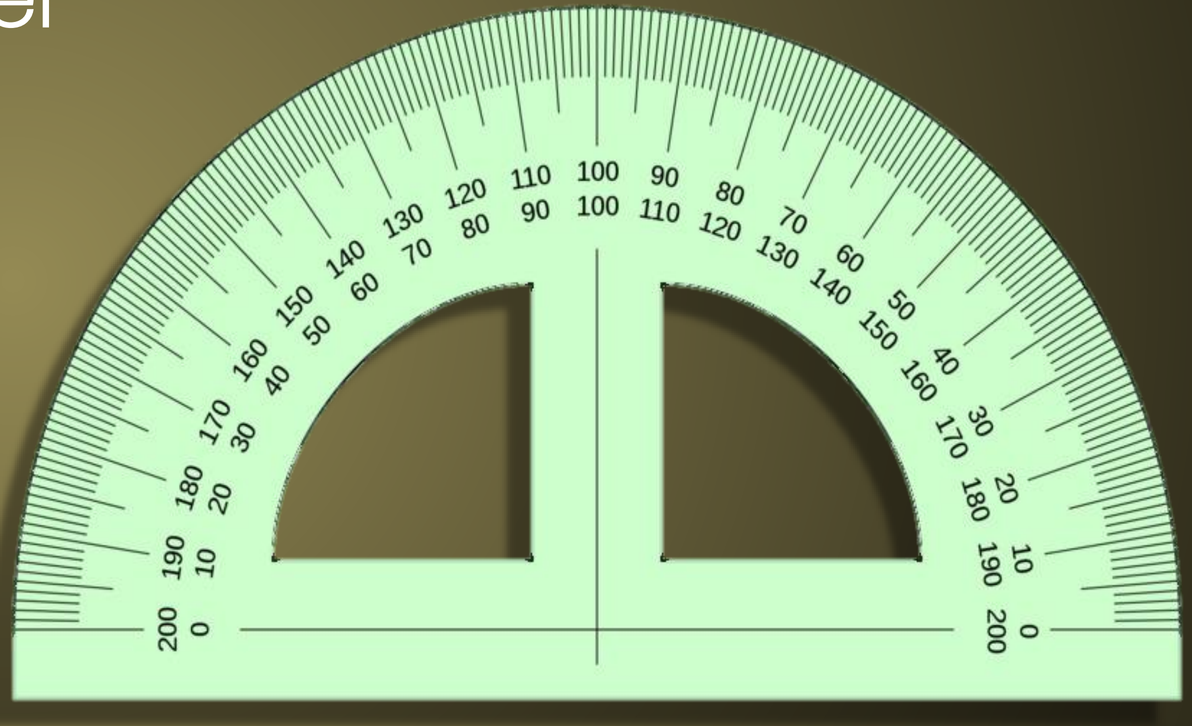
Exatidão versus Precisão

Resolução

A menor porção mensurável em uma medição



Linear → 1 mm



Angular → 1°

Onde a gente erra?

Em tudo que medimos!

Quando a gente erra?

Sempre que medimos

O que fazer pra não errar?

Não medir, ou aceitar e aprender com ele

Leia, reflita, critique, aprenda, MUDE, Leia mais....

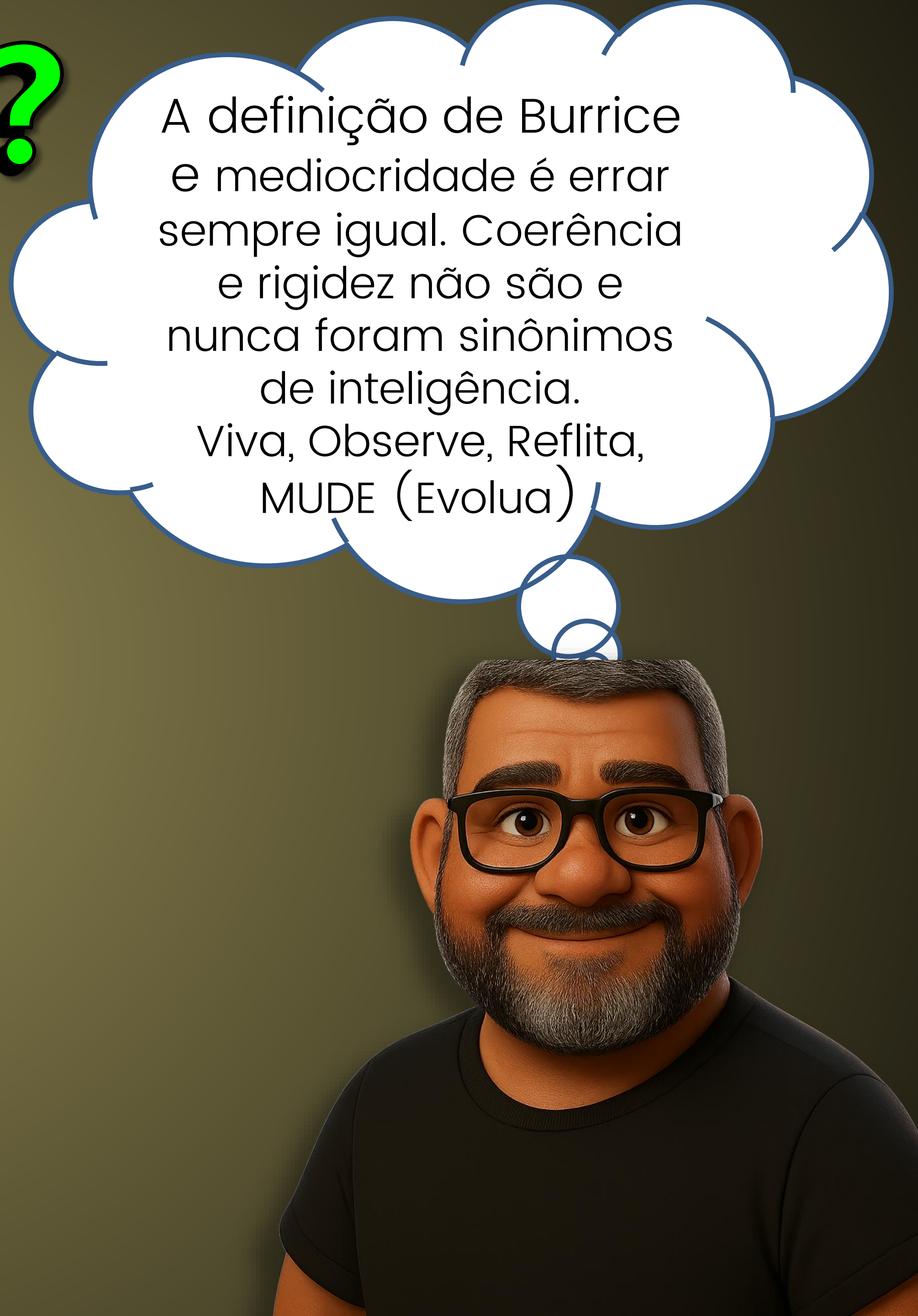
Ailton Krenak é filósofo, ambientalista e líder indígena, é um pensador brasileiro que questiona o modelo de desenvolvimento atual e propõe uma relação mais equilibrada entre ser humano, natureza e tecnologia.

“Temos vivido como se fôssemos separados da Terra. Isso é um grande erro. A natureza não é um recurso. Ela é o próprio sustento da vida.”

O povo Krenak é originário do Brasil e vive em áreas do Mato Grosso, São Paulo e Minas Gerais, onde está maior parte da população. Atualmente, estão situados em sua maioria na Terra Indígena Krenak, em Resplendor/MG

O que eu faço então?

1. Aprenda a fazer as perguntas certas
2. Aceite, você não é perfeito(a), mas também não é burro(a)
3. Seja paciente e generoso(a) com o(a) outro(a)
4. As perguntas certas são:
   - onde eu errei?
   - qual é o tamanho do meu erro?
5. Tente errar diferente da próxima vez

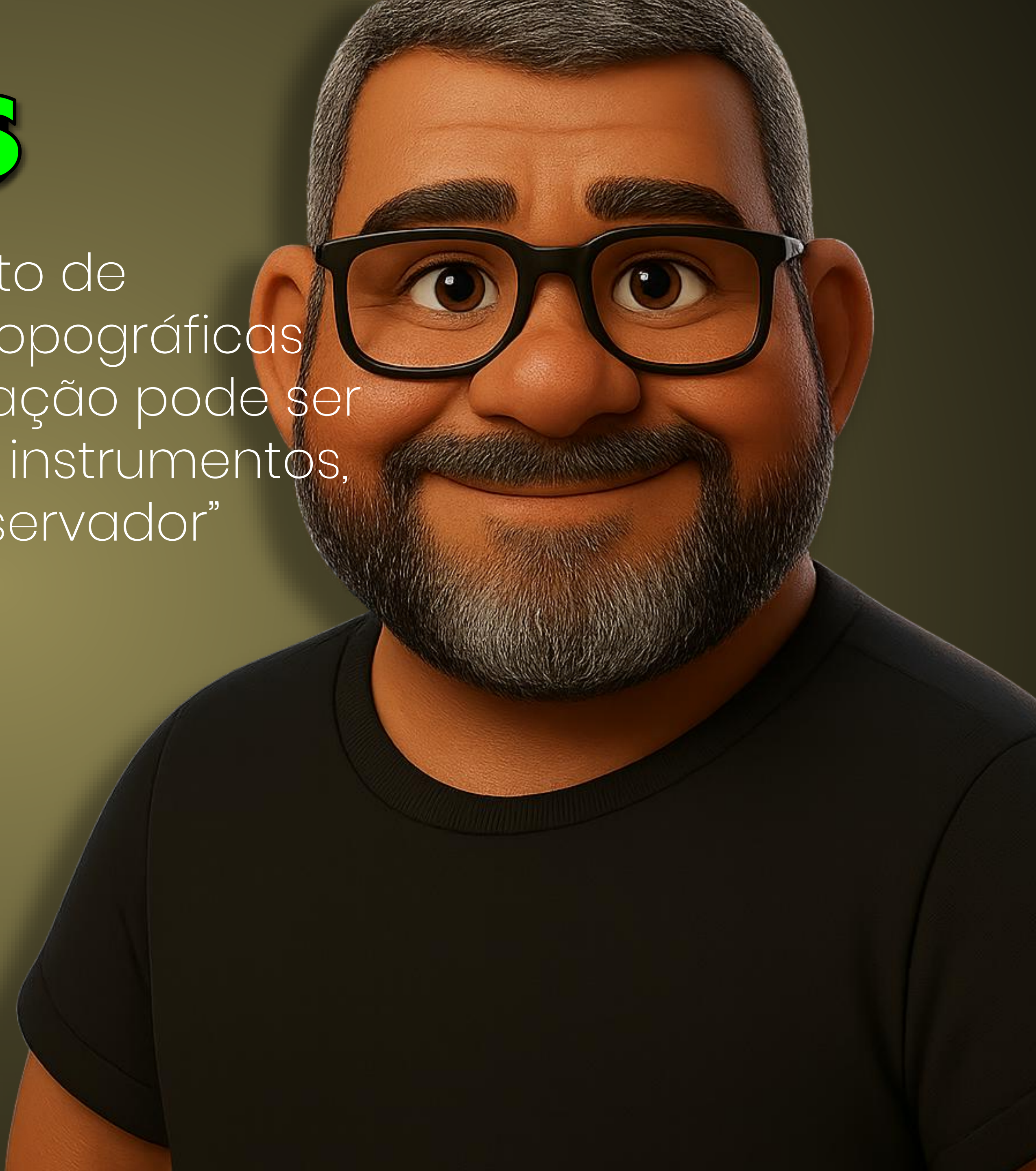


Tipos de erros

"O ato de medir é, em essência, um ato de comparar, no caso de observações topográficas (ângulos e distâncias), essa comparação pode ser afetada por erros ocasionados pelos instrumentos, pelas condições exteriores e pelo observador"

Três grandes categorias:

- Grosseiros
- Sistemáticos
- Acidentais



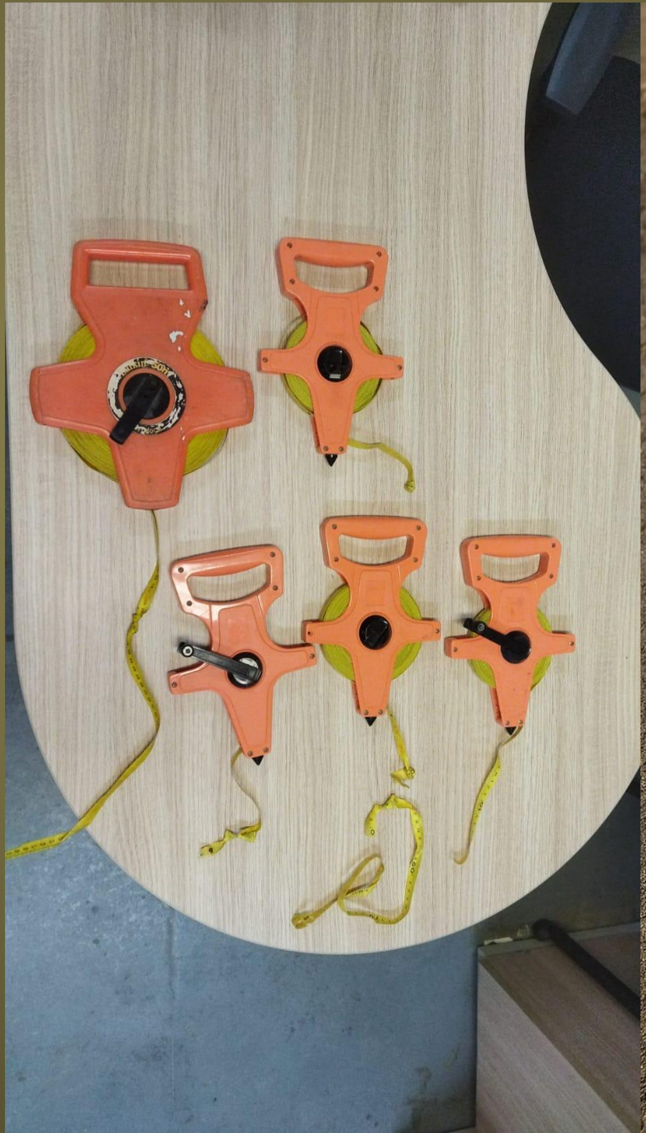
Erros grosseiros → Pessoa/operador

As causas principais podem ser:

- Desatenção do operador
- Mau funcionamento do instrumento de medição
- Troca de dígitos durante leitura ou anotação de uma medida
- Geralmente tem como características: Valores muito altos, ou muito baixos de fácil identificação

Erros Sistemáticos → Equipamentos

São os erros que aparecem numa medida com absoluta constância ou variando segundo uma lei determinada. Este erro poderá ser eliminado quando sua causa for definida. Os erros sistemáticos apresentam sempre o mesmo sinal, que poderá ser positivo ou negativo, considerando-se a mesma grandeza medida, mesmo equipamento e mesmo operador.



Erros Acidentais → Aceite, dói menos!

São os erros devidos às ações simultâneas e independentes de causas diversas e desconhecidas. Poderão apresentar ora valor positivo, ora valor negativo para a mesma situação. A ciência se conforma com estes erros e institui métodos para escolher o valor mais representativo da série de grandeza medida.

TEORIA DOS ERROS

Tem por finalidade estabelecer um **método seguro** e conveniente, segundo o qual sempre se possa **estabelecer o valor mais aceitável de uma grandeza**, uma vez que se reconhece ser impossível tornar as medidas isentas de erros. Além disso, a teoria dos erros se preocupa em **determinar o erro mais tranquilizador** que se pode cometer a respeito do valor de uma determinada grandeza que se mede.

De novo, Não!!

Uma coisa é uma coisa, outra coisa é outra coisa

- Erro Verdadeiro é o afastamento h, que existe entre o verdadeiro valor de uma grandeza X (desconhecida) e uma medida qualquer l que se obtenha dessa grandeza

- Erro Aparente ou resíduo é o afastamento v, que existe entre o valor mais aceitável e mais conveniente x, que se tomou para definir uma grandeza (de valor real X desconhecido) e uma medida qualquer

Medidas superabundantes

- Para n medidas efetuadas de uma mesma grandeza (l1, l2, l3,....,ln), o valor mais aceitável é o que se obtém através da **média aritmética** dos valores dessas medidas.

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n}$$

- e serão erros aparentes:

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad \ldots\ldots\ldots \; v_n = x - l_n$$

Erro Médio Aritmético

É o valor **ε**0, obtido através do somatório modular dos erros aparentes (v) dividido pelo número de observações ou medidas.

$$\varepsilon_0 = \frac{\Sigma|v|}{n} \qquad \Sigma|v| = somatório\ em\ valor\ absoluto$$

Método dos Mínimos Quadrados MMQ

- A soma dos quadrados dos erros deve ser um o mínimo valor possível, isto é:

  $v1v1 + v2v2 + \ldots + vnvn$ = mínimo

- O quadrado de qualquer quantidade positiva ou negativa é sempre um valor positivo, o que tranquiliza a respeito da co-participação dos sentidos dos erros no critério a adotar, sem os prejuízos oriundos de um mínimo pouco expressivo.

Valor mais Plausível

- O Valor de uma grandeza desconhecida X , em torno da qual se efetuam medidas diretas, inspirando todas o mesmo grau de confiança é a média aritmética simples destas medidas (l).

$$x = \frac{\sum l}{n}$$

- Erro Médio Quadrático de uma Observação Isolada é o afastamento mais adequado, expresso por um número ε1, entre o valor real X da grandeza que se mede e o seu valor mais plausível x.

$$\varepsilon_1 = \pm\sqrt{\frac{\sum vv}{(n-1)}}$$

- onde Σvv representa a soma dos quadrado dos resíduos (v) que são obtidos pela diferença entre a média aritmética (x) e cada uma das medidas (l)

Erro Médio Quadrático da Média Aritmética (εm)

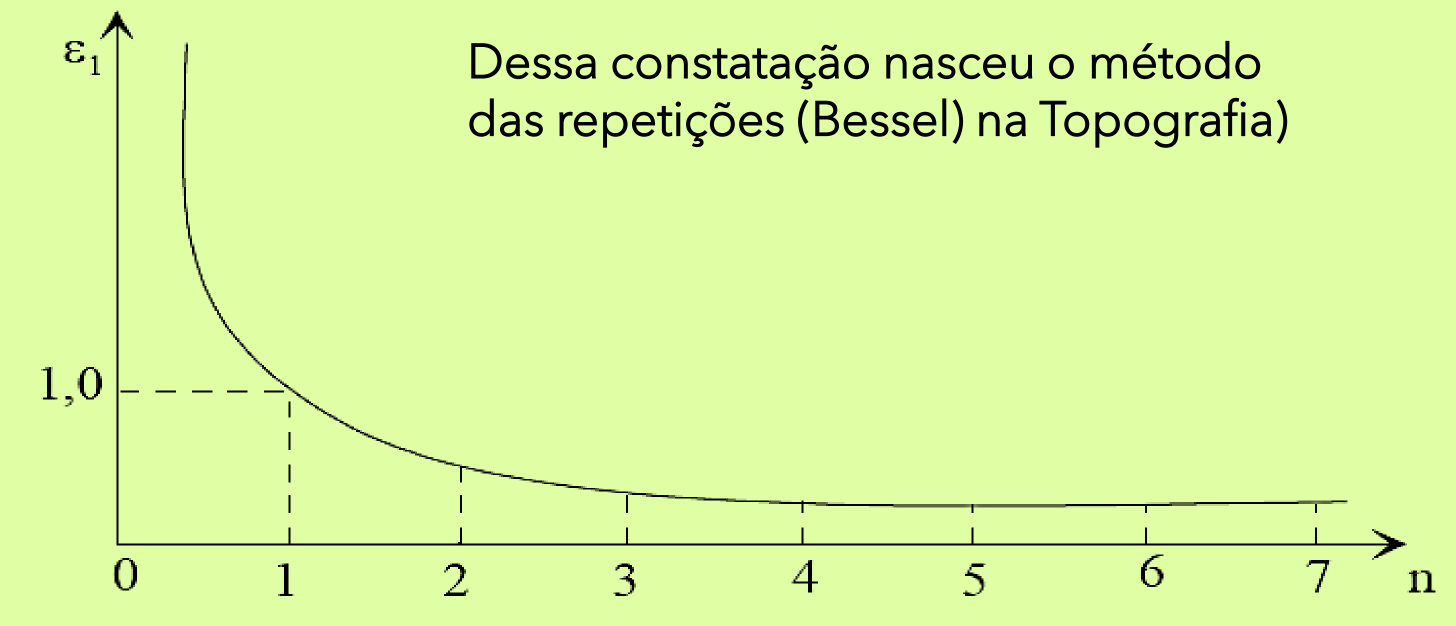
- de uma grandeza X cujo valor mais plausível seja definido por uma média aritmética simples entre os valores das observações é:

$$\varepsilon_m = \pm\sqrt{\frac{\Sigma vv}{n(n-1)}}$$

- Se utilizarmos a equação do erro médio quadrático da média aritmética (ε m) e considerarmos o erro médio quadrático de uma observação isolada (ε1) igual a 1 e variarmos o número de observações efetuadas sobre uma mesma grandeza (n), obteremos valores para εm .

Quantas vezes preciso medir?

- Se considerarmos estes valores como y e os valores de (n) como x, podemos construir um gráfico que nos mostrará o grau de diminuição do erro médio quadrático com o aumento do número de repetições da grandeza medida.



- A curva obtida, é uma curva assintótica, ou seja, o erro médio tende para zero à medida que se aumenta indefinidamente o número de observações.

Média Aritmética Ponderada Xp

É o valor ponderado de uma grandeza desconhecida X, em torno da qual se efetuaram medidas não condicionadas, com graus de exatidão diferentes e conhecidos por intermédio dos números p1, p2,....,pn, os quais representam os pesos atribuídos a cada medida efetuada.

$$X_P = \frac{\Sigma(x_i \times p_i)}{\Sigma p_i}$$ onde "*i*" representa cada série de medida

O valor dos pesos das observações (p) são inversamente proporcionais ao valor do quadrado do erro médio quadrático da média aritmética (hm) de cada observação.

$$p_i = \frac{1}{(\varepsilon_{m_i})^2}$$

Erro Médio Quadrático da Média Ponderada

É dado pela seguinte equação:

$$\varepsilon_{mp} = \sqrt{\frac{\Sigma(vv_i \times p_i)}{\Sigma p_i (n-1)}}$$

onde:

vv representa o quadrado do resíduo (v) que é obtido pela diferença entre a média ponderada e a média aritmética de cada série de medida.

$$v_i = X_{P_i} - x_i$$

onde "i" representa cada série de medidas.

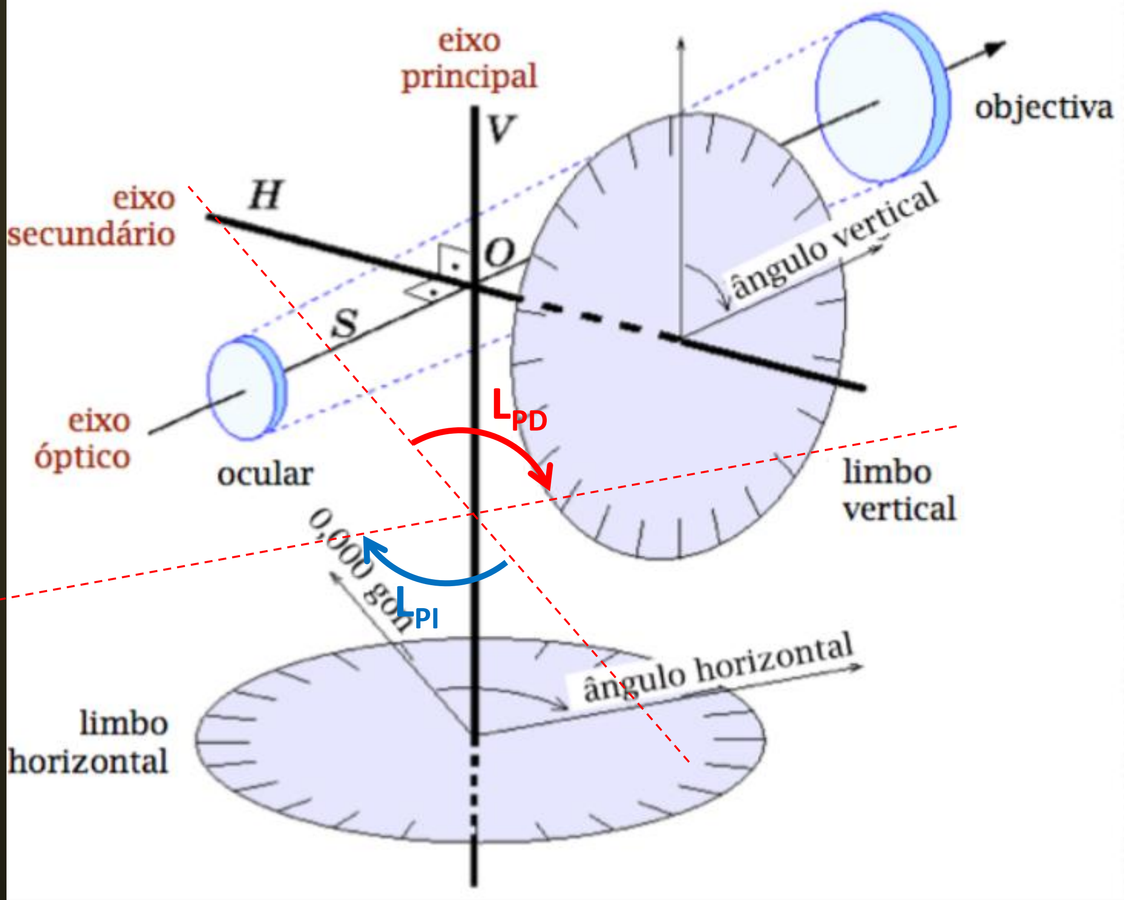
EXEMPLO PRÁTICO COM MEDIDAS ANGULARES

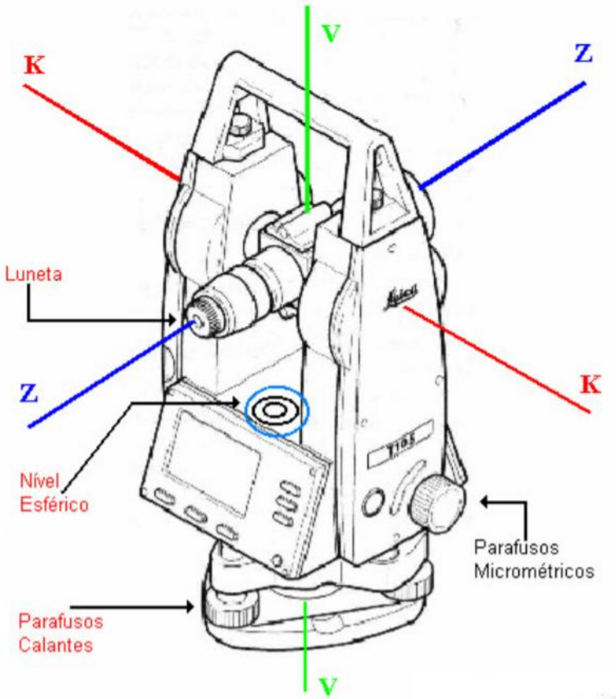
MÉTODO DE BESSEL ou DAS DIREÇÕES

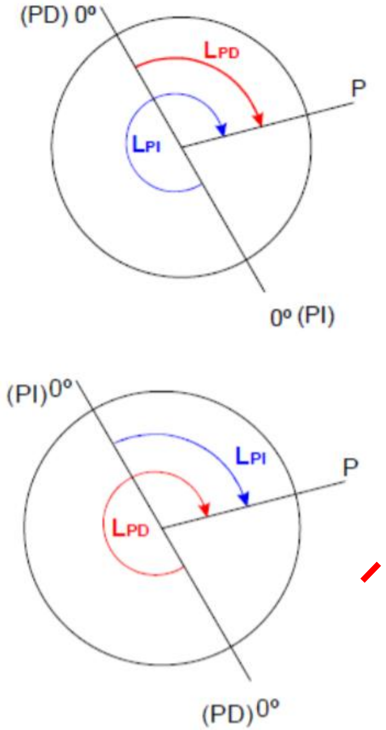
"Consiste nas medições angulares horizontais com visadas das direções determinantes nas duas posições de medição permitidas pelo teodolito (direta e inversa), a partir de uma direção tomada como origem, que ocupa diferentes posições no limbo horizontal do teodolito. As observações de uma direção, nas posições direta e inversa do teodolito, chamam-se leituras conjugadas. Uma série de leituras conjugadas consiste na observação sucessiva das direções, a partir da direção-origem, fazendo-se o giro de ida na posição direta da luneta e de volta na posição inversa, ou vice-versa, terminando na última direção e iniciando-se, aí, a volta sem fechar o giro. O intervalo, medido no limbo horizontal do teodolito, entre as posições da direção-origem neste limbo, chama-se intervalo de reiteração. Assim, para observação de "n" séries de leituras conjugadas pelo método das direções, o intervalo de reiteração deve ser 180°/n. Como exemplo, se forem três séries de leituras conjugadas, o intervalo de reiteração deve ser 180°/3 = 60°, e a direção-origem deve ocupar, no limbo horizontal do teodolito, posições nas proximidades de 0°, 60° e 120°. Os valores dos ângulos medidos pelo método das direções são as médias aritméticas dos seus valores obtidos nas diversas séries" NBR 13133

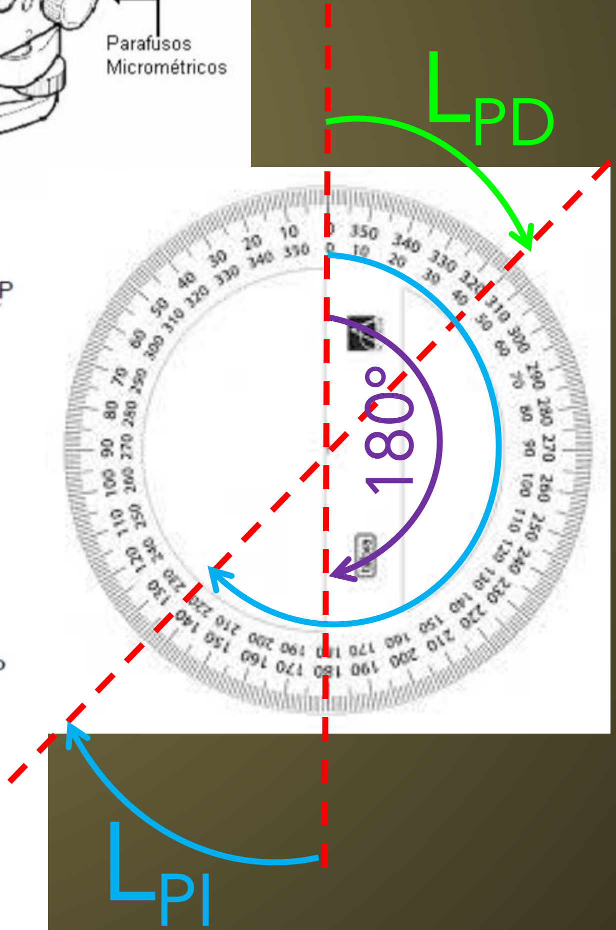
MÉTODO DAS DIREÇÕES

Como Fazer na Prática?









Veja na prática como identificar as posições direta e inversa do equipamento

Exemplo prático:

CONTEXTO:

Um grupo de alunos de engenharia, usou o método de Bessel para fazer uma série de observações. Sendo que Cada um dos 3 alunos(as) fez 3 medidas angulares que resultou na seguinte planilha:

Alunos(as)		Posição Direta	Posição Inversa	Posição Direta
Aluno 1	Inicial	*0 0 0*	*180 0 34*	*311 49 37*
	Final	***55 33 10***	***235 33 17***	***7 17 33***
Aluno 2	Inicial	*0 0 0*	*179 58 59*	*357 36 40*
	Final	***55 16 24***	***235 17 08***	***52 53 27***
Aluno 3	Inicial	*0 0 0*	*180 01 05*	*206 29 57*
	Final	***55 28 10***	***235 28 30***	***261 58 27***

1. Qual a melhor série de medidas?
2. Qual o Valor mais provável para o ângulo medido?

1ª série de medidas (aluno1)

Aluno		Posição Direta	Posição Inversa	Posição Direta
Aluno 1	Inicial	*0° 0′ 0″*	*180 0 34*	*311 49 37*
	Final	*55 33 10*	*235 33 17*	*7 17 33*

Valor Angular Médio = Σx/n;

(ângulo final –ângulo inicial)

Posição Direta:55° 33′ 10″ - 0° 0° 0°= 55° 33′ 10″;

Posição Inversa: 235° 33′ 17″- 180° 00′ 34″= 55° 32′ 43″;

Posição Direta: (360°-311° 49′ 37″+ 7° 17′ 33″)=55° 27′ 56″;

Valor angular médio (x): 55° 31′ 16,3″

Valor Angular Médio

x= 55° 31′ 16,3″

Resíduos v1

v1= 31′ 16,3″- 33′ 10″

v1=0° 1′ 53,7″→ 1′= 60″

→60″+53,7″= -113,7″

Resíduos	υ+	υ-	υυ
1		113,7	12927,69
2		96,7	9350,89
3	200,3		40120,09
?	200,3	210,4	62398,67

v = média-obs

*Resíduos em segundos (″)

1ª série de medidas
Aluno1

Resíduos	$\upsilon+$	$\upsilon-$	$\upsilon\upsilon$
1		113,7	12927,69
2		96,7	9350,89
3	200,3		40120,09
Σ	200,3	210,4	62398,67

Erro médio aritmético → $\varepsilon 0 = \Sigma|\upsilon|/n$

$\varepsilon 0 = (200,3+210,4)/3 = 136,9'' \rightarrow 2'\ 16,9''$

Erro médio quadrático de uma observação → $\varepsilon 1 = \pm\sqrt{(\Sigma\upsilon\upsilon)/(n-1)}$

$\varepsilon 1 = \pm\sqrt{62398,67/2} = 176,63'' \rightarrow 2'\ 56,63''$

Erro médio quadrático da média aritmética → $\varepsilon m = \pm\sqrt{(\Sigma\upsilon\upsilon)/(n(n-1))}$

$\varepsilon m = \pm\sqrt{62398,67/6} = 101,98'' \rightarrow 1'\ 41,98''$

Valor mais provável por série de medidas		
aluno1	**55º 31’ 16,3”**	**± 1’ 41,98”**
aluno2		
aluno3		

2ª série de medidas

Aluno 2

Aluno		Posição Direta	Posição Inversa	Posição Direta
Aluno 2	Inicial	0 0 0	179 58 59	357 36 40
	Final	55 16 24	255 17 08	52 53 27

Valor Angular Médio = Σx/n;

(ângulo final –ângulo inicial)

Posição Direta: = 55° 16′ 24″;

Posição Inversa: = 55° 18′ 09″;

Posição Direta: =55° 16′ 47″;

Valor angular médio (x) = 55° 17′ 07″

Resíduos	υ+	υ-	υυ
1	43		1849
2		62	3844
3	20		400
Σ	63	62	6093

*Resíduos em segundos (″)

2^a série de medidas
Aluno 2

Resíduos	$\upsilon+$	$\upsilon-$	$\upsilon\upsilon$
1	43		1849
2		62	3844
3	20		400
Σ	63	62	6093

Erro médio aritmético → $\varepsilon_0 = \Sigma|\upsilon|/n$ → $\varepsilon_0 = (63+62)/3 = 41{,}7''$

Erro médio quadrático de uma observação ε_1

$\varepsilon_1 = \pm\sqrt{(\Sigma\upsilon\upsilon)/(n-1)}$ → $\varepsilon_1 = = \pm\sqrt{6093/2} = 55{,}20''$

Erro médio quadrático da média aritmética ε_m

$\varepsilon_m = \pm\sqrt{(\Sigma\upsilon\upsilon)/(n(n-1))}$ → $\varepsilon_m = \pm\sqrt{6093/6} = 31{,}87''$

Valor mais provável por série de medidas		
Aluno1	55° 31′ 16,3″	± 1′ 41,979″
Aluno2	55° 17′ 07″	± 31,87″
Aluno3		

3ª série de medidas

Aluno3

Aluno		Posição Direta	Posição Inversa	Posição Direta
Aluno 3	Inicial	0 0 0	180 01 05	206 29 57
	Final	55 28 10	235 28 30	261 58 27

Valor Angular Médio = Σx/n

(ângulo final –ângulo inicial)

Posição Direta: = 55° 28′ 10″

Posição Inversa: = 55° 27′ 25″

Posição Direta: = 55° 28′ 30″

Valor angular médio (x): 55° 28′ 02″

Resíduos	υ+	υ-	$\upsilon\upsilon$
1		8	64
2	36		1296
3		28	784
Σ	36	36	2144

*Resíduos em segundos (″)

3ª série de medidas
Aluno 3

Resíduos	$\upsilon+$	$\upsilon-$	$\upsilon\upsilon$
1		8	**64**
2	36		**1296**
3		28	**784**
Σ	36	36	**2144**

Erro médio aritmético → $\varepsilon_0 = \Sigma|\upsilon|/n$ → $\varepsilon_0 = (36+36)/3 = 24''$

Erro médio quadrático

de uma observação→ $\varepsilon_1 = \pm\sqrt{(\Sigma\upsilon\upsilon)/(n-1)}$ $\varepsilon_1 = \pm\sqrt{2144/2} = 33''$

Erro médio quadrático da média aritmética→ $\varepsilon_m = \pm\sqrt{(\Sigma\upsilon\upsilon)/(n(n-1))}$

$\varepsilon_m = \pm\sqrt{/6} = 19''$

1-Qual a melhor série de medidas?

Valor mais provável por série de medidas		
Aluno1	55° 31′ 16,3″	± 1′ 41,979″
Aluno2	55° 17′ 07″	± 31,87″
Aluno3	55° 28′ 02″	± 19″

E dai? Alguém está certo?

Compare		
Aluno 1	55° 31′ 16,3″	± 1′ 41,979″=101,979″
Aluno 2	55° 17′ 07″	± 31,87″
Aluno 3	55° 28′ 02″	± 19″

Quanto mais medidas se tem, melhores as chances de encontrar um valor mais provável mais equilibrado;

O valor mais provável foi o valor médio entre as médias das 3 séries, função de seu grau de incerteza ser inferior aos demais;

Para estas medidas (série) pode-se constatar:

- o Aluno 1, dentre os 3 foi aquele que tomou medidas que mais se discrepantes;
- o Aluno 2 o que tomou medidas intermediárias e
- o Aluno 3 foi o que se desviou menos da média das medidas observadas (ninguém acertou, mas o aluno 3 errou menos que os outros dois)

2) Qual o valor mais provável da série de 9 medidas? média ponderada

Cálculo dos pesos (p) de cada série:

$P = 1/(\Sigma m)^2$ → P1=1/(101,979)2

Série	Peso (P)
aluno1	0,000096156
aluno2	0,000984545
aluno3	0,002770083
Σ	**0,003850784**

Cálculo da Média Ponderada:

$Xp = \Sigma(x.P) / \Sigma P$

Xp=(55º 31’ 16,3” * 0,000096156 + 55º 17’ 07” *0,000984545 + 55º 28’ 02” * 0,002770083) / 0,003850784 → Xp= 55° 25’ 19” ± ??

Cálculo do Resíduo da Média Ponderada: v=Xp-x

Resíduo	v	vv
aluno1	-357,3	127663,29
aluno2	492	242064
aluno3	-163	26569
Σ		396296,29

Qual o valor mais provável de toda a série de medidas?

Cálculo do erro médio Quadrático da Média Ponderada (ε_m p) : ε_m p = √(Σvv * P) / (Σ P(n-1)

ε_m p= √(127663,29 * 0,000096156 + 242064 * 0,000984545 + 26569 * 0,002770083) / (0,003850784 *2)

εm p= 205,17″ ≈ 3′ 25″

$$\boxed{Xp = 55° \, 25' \, 19'' \pm 3' \, 25''}$$

ATIVIDADE avaliativa 2

CONTEXTO:

Um grupo de 3 alunos de Topografia realizou as seguintes medições angulares em campo:

Aluno		Posição Direta	Posição Inversa	Posição Direta
Aluno 4	Inicial	0° 0′ 02″	180° 04′ 29″	299° 10′ 56″
	Final	26° 53′ 13″	206° 54′ 13″	326° 03′ 42″
Aluno 5	Inicial	0° 0′ 02″	180° 00′ 51″	284° 05′ 05″
	Final	26° 52′ 33″	206° 53′ 42″	310° 58′ 05″
Aluno 6	Inicial	0° 0′ 0″	180° 00′ 48″	0° 0′ 12″
	Final	26° 51′ 57″	206° 53′ 19″	26° 51′ 42″

Leia, compreenda, analise e determine:

1. Qual a melhor série de medidas entre os três alunos?
2. Qual o valor mais provável para o ângulo medido(considerando as 9 observações?

Tema 3: fake News, antídotos

- use a desconfiança como método;
- Lembre que tudo é narrativa;
- Se pergunte : Quem se beneficia?